
TEMI ESAME

Esercizio 1 - Tema d'esame del 21/09/1998

Si consideri la struttura illustrata in figura, con EJ costante.

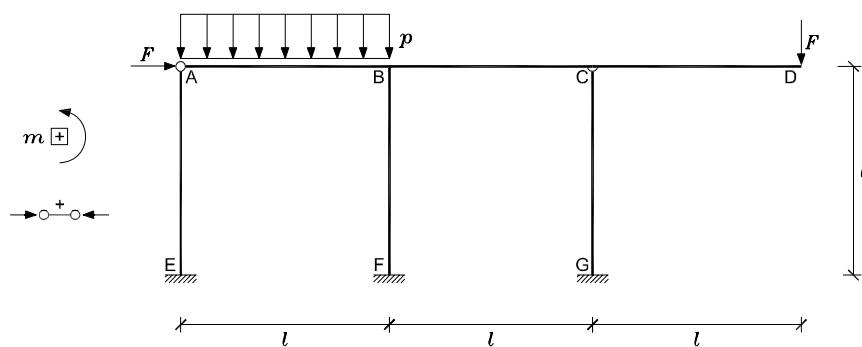


Figura 1.1

Il valore dell'azione concentrata F è pari a:

$$F = \frac{21}{4} pl$$

La struttura illustrata in figura risulta essere, dall'analisi cinematica, una struttura due volte iperstatica a nodi spostabili.

Il *metodo degli spostamenti* può essere applicato assumendo come incognite la rotazione φ_B del nodo B e lo spostamento orizzontale η_A del nodo A ed irrigidendo la struttura attraverso un *blocchetto*, rappresentato da un quadratino, e da una *biella fittizia* posti rispettivamente in corrispondenza del nodo B e del nodo A .

L'asta CD risulta essere un'appendice isostatica, per cui viene studiata separatamente e sulla struttura restante vengono riportate le reazioni date dalla forza F concentra in D

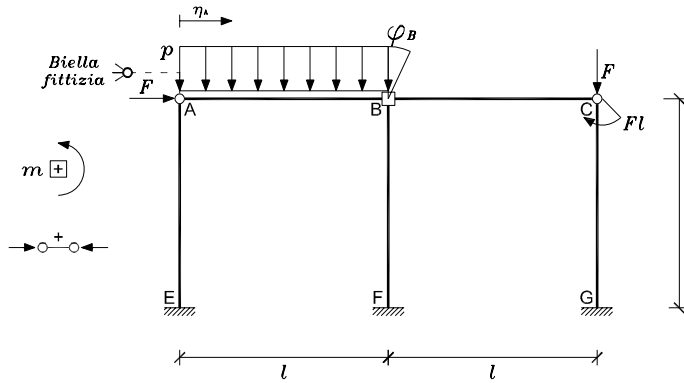


Figura 1.2

Il sistema risolvente è costituito dalle equazioni di equilibrio alla rotazione del nodo B ed alla traslazione orizzontale del nodo A:

$$\begin{cases} \sum M_B = m_{B\varphi} \varphi_B + m_{B\eta} \eta_A + m_{B0} = 0 \\ \sum H_{biella} = h_{A\varphi} \varphi_B + h_{A\eta} \eta_A + h_{A0} = 0 \end{cases}$$

I coefficienti di influenza possono essere determinati, secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente le azioni indotte sulla struttura dalla rotazione unitaria φ_B , dallo spostamento orizzontale unitario η_A e dai carichi esterni.

Ponendo $\varphi_B = 1$, $\eta_A = 0$, $p = 0$ e $F = 0$ si ha:

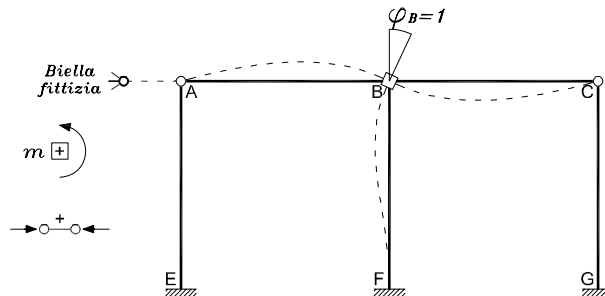


Figura 1.3

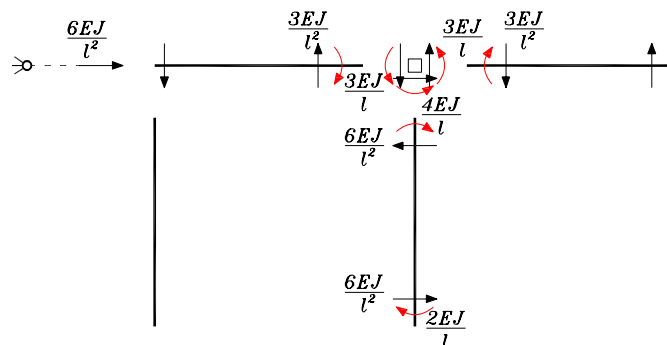


Figura 1.4

$$\begin{cases} m_{B\varphi} = \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} = \frac{10EJ}{l} \\ h_{A\varphi} = -\frac{6EJ}{l^2} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B=0$, $\eta_A=1$, $p=0$ e $F=0$ si ha:

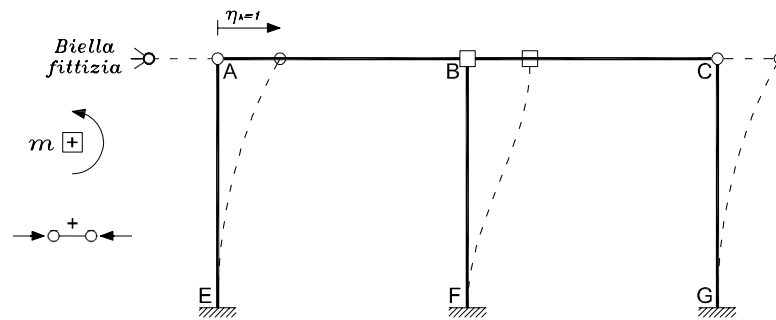


Figura 1.5

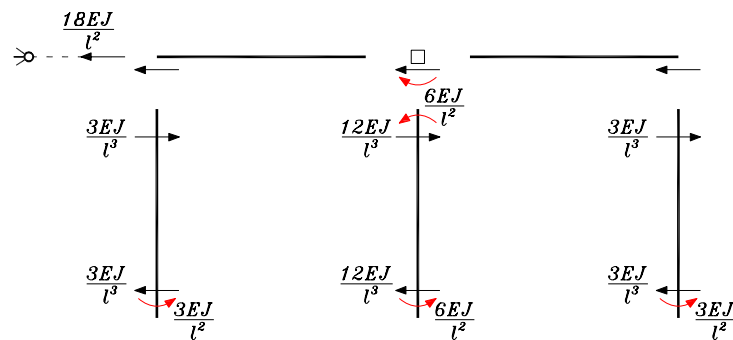


Figura 1.6

$$\begin{cases} m_{B\eta} = -\frac{6EJ}{l^2} \\ h_{A\eta} = \frac{3EJ}{l^3} + \frac{12EJ}{l^3} + \frac{3EJ}{l^3} = \frac{18EJ}{l^3} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B=0$, $\eta_A=0$, $p \neq 0$ e $F=0$ si ha:

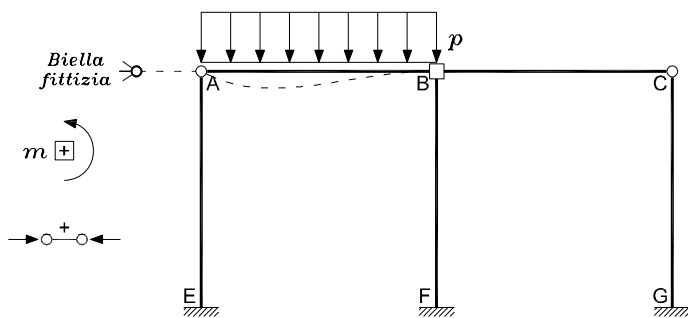


Figura 1.7

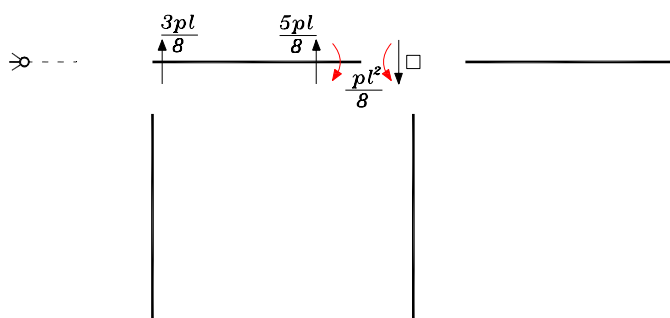


Figura 1.8

$$\begin{cases} m_{B0,p} = \frac{pl^2}{8} \\ h_{A0,p} = 0 \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_A = 0$, $p = 0$ e $F \neq 0$ si ha:

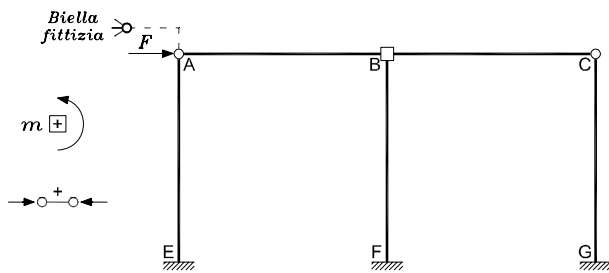


Figura 1.9

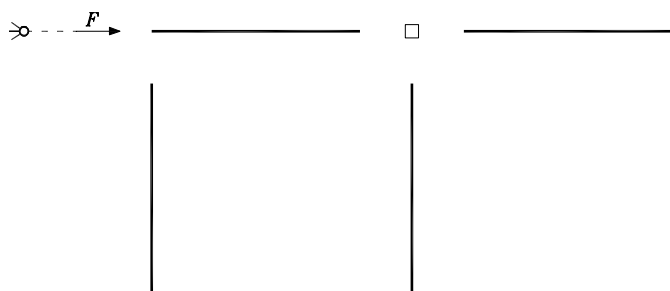


Figura 1.10

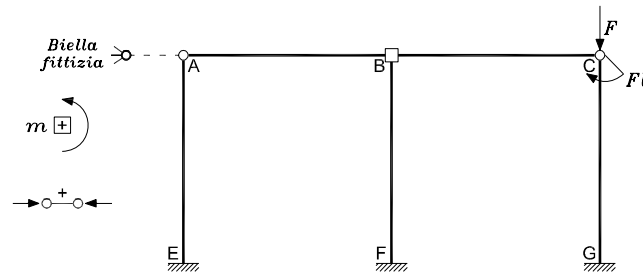


Figura 1.11

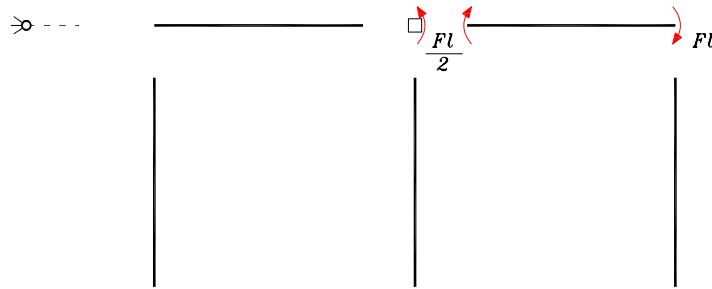


Figura 1.12

$$\begin{cases} m_{B0,F} = \frac{Fl}{2} \\ h_{A0,F} = -F \end{cases}$$

Noti i *coefficienti di influenza* possono essere determinati i valori delle incognite φ_B e η_A attraverso la risoluzione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{10EJ}{l} \varphi_B - \frac{6EJ}{l^2} \eta_A + \frac{pl^2}{8} + \frac{Fl}{2} = 0 \\ -\frac{6EJ}{l^2} \varphi_B + \frac{18EJ}{l^3} \eta_A - F = 0 \end{cases}$$

La rotazione φ_B e lo spostamento orizzontale η_A risultano:

$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{1}{8} \frac{pl^3}{EJ} \\ \eta_A = +\frac{1}{4} \frac{pl^4}{EJ} \end{cases}$$

Noti i valori delle incognite è possibile valutare le azioni interne agenti sulla struttura per effetto della rotazione φ_B , dello spostamento orizzontale η_A e dei carichi esterni ed, attraverso il *principio di sovrapposizione degli effetti*, determinarne la risultante.

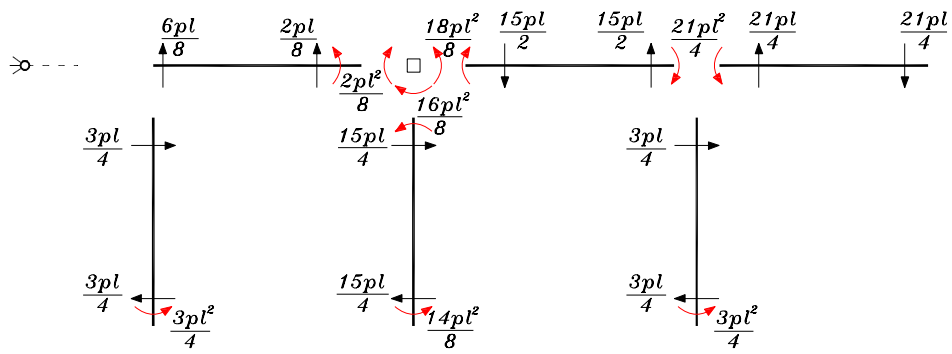


Figura 1.13

Nella seguente figura sono indicati il diagramma dell'azione assiale N , dell'azione di taglio V , del momento flettente M e la deformata della struttura.

N

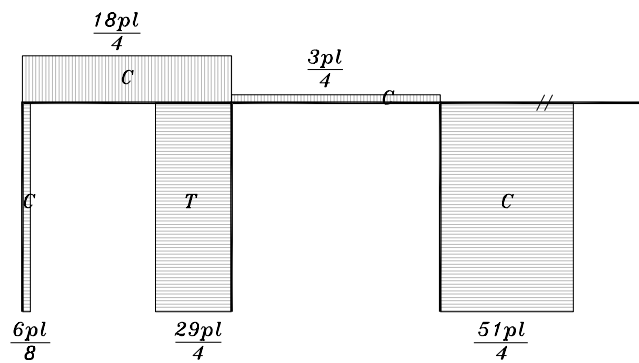


Figura 1.14

V

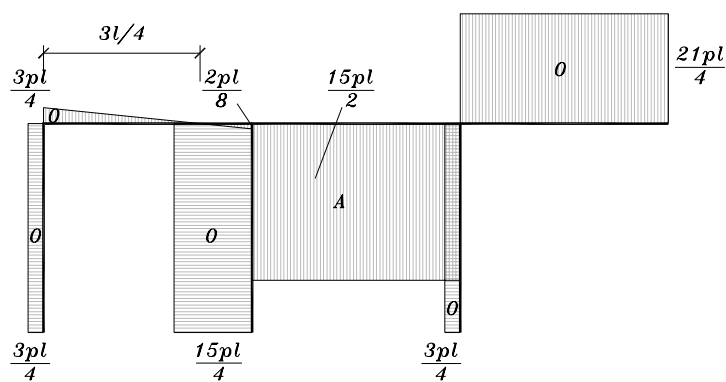


Figura 1.15

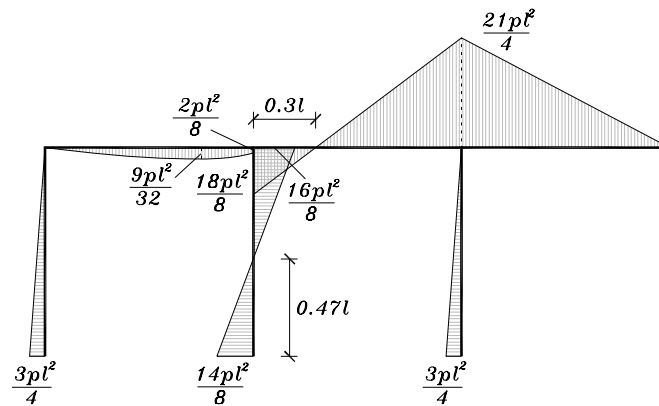
M


Figura 1.16

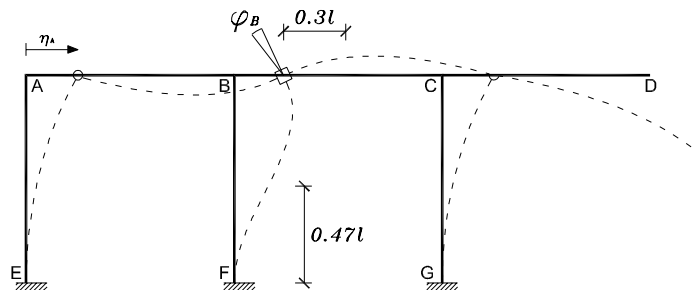
Deformata


Figura 1.17

Osservazione 1

La posizione del momento massimo positivo sull'asta AB si determina calcolando il punto in cui si annulla il taglio:

$$\frac{18}{8} : x = \frac{15}{2} : l$$

$$x = 0.3 \cdot l$$

Nota la posizione in cui si annulla il taglio, si può determinare il valore del momento massimo positivo sull'asta AB:

$$M = \frac{6}{8} plx - p \frac{x^2}{2} = \frac{9}{32} pl^2$$

Osservazione 2

Visto che l'andamento del momento risulta lineare sia sull'asta BC che sull'asta BE, la posizione dei punti di flesso si ricava con una proporzione tra triangoli:

- Asta BC:

$$\frac{18}{8} : x = \frac{15}{2} : l$$

$$x = 0.3 \cdot l$$

- Asta BF:

$$\frac{14}{8} : x = \frac{15}{4} : l$$

$$x = 0.47 \cdot l$$

Esercizio 2 - Tema d'esame del 09/1998

Si consideri la struttura illustrata in figura, con EJ costante.

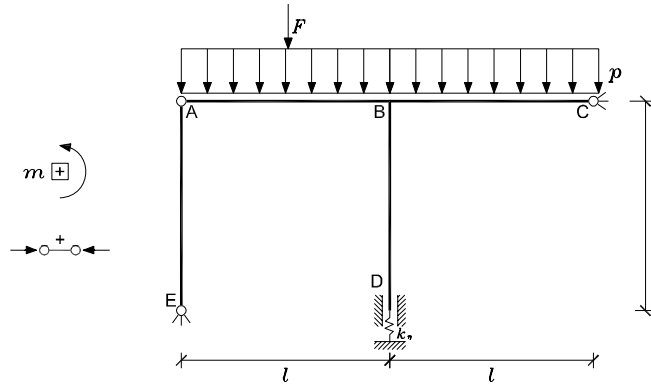


Figura 2.2

I valori dell'azione concentrata F e della molla assiale k_n sono pari a:

$$F = 4pl$$

$$k_n = 10 \frac{EJ}{l^3}$$

La struttura illustrata in figura risulta essere, dall'analisi cinematica, una struttura due volte iperstatica a nodi spostabili.

Il *metodo degli spostamenti* può essere applicato assumendo come incognite la rotazione φ_B del nodo B e lo spostamento verticale η_D del nodo D ed irrigidendo la struttura attraverso un *blocchetto*, rappresentato da un quadratino, e da una *biella fittizia* posti rispettivamente in corrispondenza del nodo B e del nodo D .

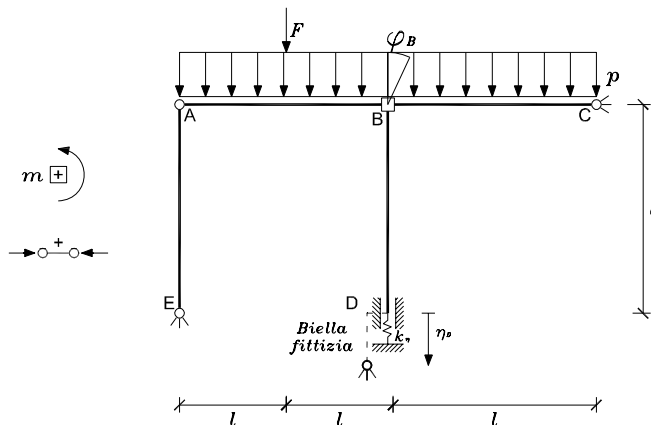


Figura 2.2

Il sistema risolvante è costituito dalle *equazioni di equilibrio alla rotazione* del nodo B ed alla *traslazione verticale* del nodo D:

$$\begin{cases} \sum M_B = m_{B\varphi}\varphi_B + m_{B\eta}\eta_D + m_{B0} = 0 \\ \sum H_{biella} = h_{D\varphi}\varphi_B + h_{D\eta}\eta_D + h_{D0} = 0 \end{cases}$$

I *coefficienti di influenza* possono essere determinati, secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente le azioni indotte sulla struttura dalla rotazione unitaria φ_B , dallo spostamento orizzontale unitario η_D e dai carichi esterni.

Ponendo $\varphi_B = 1$, $\eta_D = 0$, $p = 0$ e $F=0$ si ha:

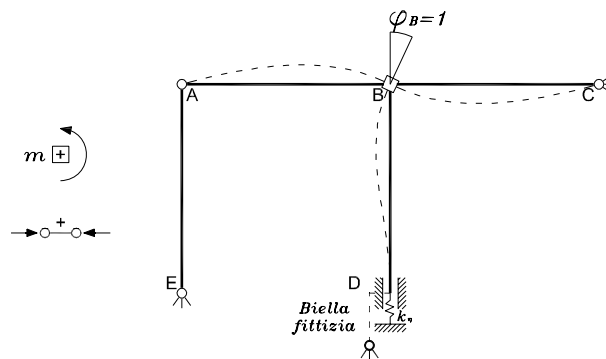


Figura 2.3

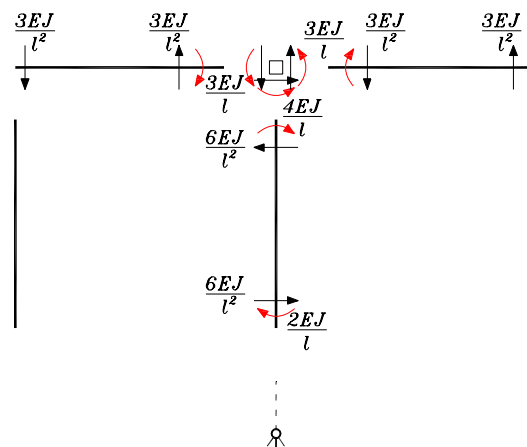


Figura 2.4

$$\begin{cases} m_{B\varphi} = \frac{3EJ}{l} + \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} = \frac{10EJ}{l} \\ h_{D\varphi} = \frac{3EJ}{l^2} - \frac{3EJ}{l^2} = 0 \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_D = 1$, $p = 0$ e $F = 0$ si ha:

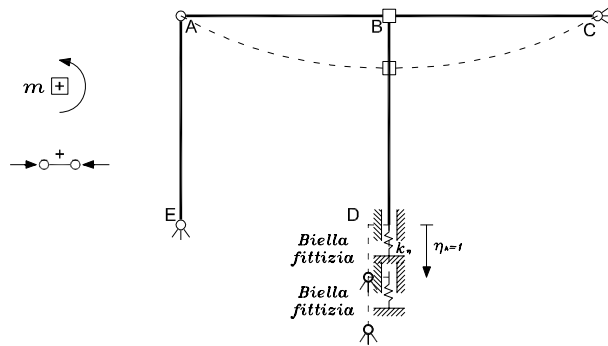


Figura 2.5

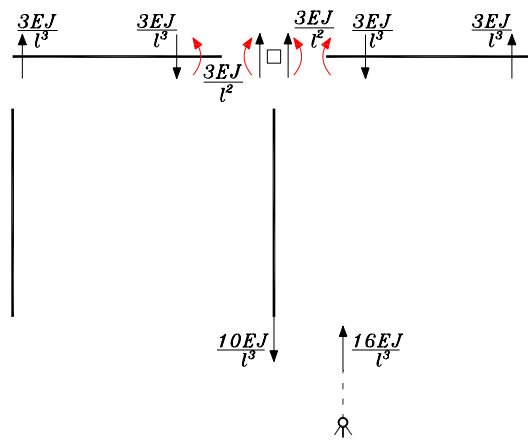


Figura 2.6

$$\begin{cases} m_{B\eta} = \frac{3EJ}{l^2} - \frac{3EJ}{l^2} = 0 \\ h_{D\eta} = -\frac{3EJ}{l^3} - \frac{3EJ}{l^3} - \frac{10EJ}{l^3} = -\frac{16EJ}{l^3} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_A = 0$, $p \neq 0$ e $F = 0$ si ha:

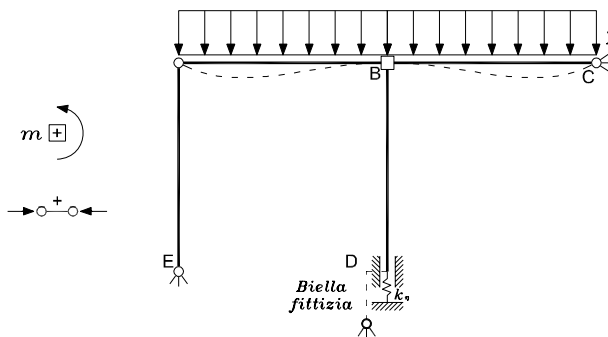


Figura 2.7

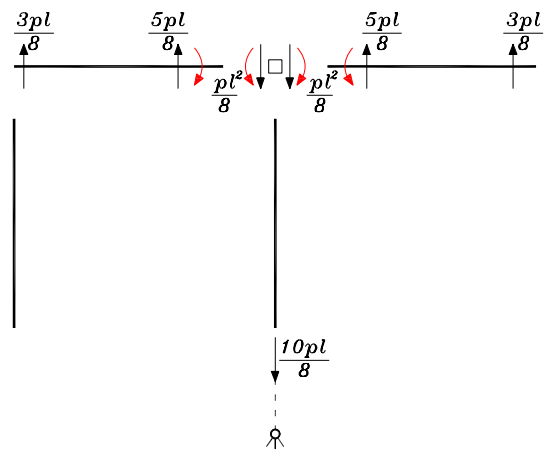


Figura 2.8

$$\begin{cases} m_{B0,p} = \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{8} = 0 \\ h_{D0,p} = \frac{5}{8}pl + \frac{5}{8}pl = \frac{10}{8}pl \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_A = 0$, $p=0$ e $F \neq 0$ si ha:

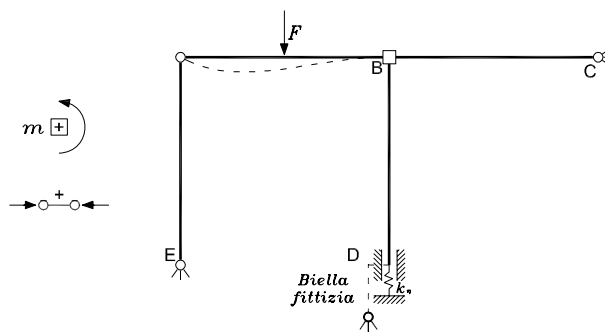


Figura 2.9

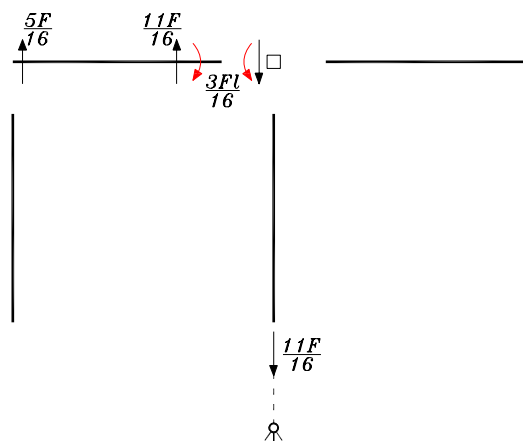


Figura 2.10

$$\begin{cases} m_{B0,F} = \frac{3}{16} Fl = \frac{3}{4} pl^2 \\ h_{D0,F} = \frac{11}{16} F = \frac{11}{4} pl \end{cases}$$

Noti i *coefficienti di influenza* possono essere determinati i valori delle incognite φ_B e η_D attraverso la risoluzione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{10EJ}{l} \varphi_B + 0\eta_D + \frac{3}{4} pl^2 = 0 \\ 0\varphi_B - \frac{16EJ}{l^3} \eta_D + \frac{5}{4} pl + \frac{11}{4} pl = 0 \end{cases}$$

La rotazione φ_B e lo spostamento orizzontale η_D risultano:

$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{3}{40} \frac{pl^3}{EJ} \\ \eta_D = +\frac{1}{4} \frac{pl^4}{EJ} \end{cases}$$

Noti i valori delle incognite è possibile valutare le azioni interne agenti sulla struttura per effetto della rotazione φ_B , dello spostamento verticale η_D e dei carichi esterni ed, attraverso il *principio di sovrapposizione degli effetti*, determinarne la risultante.

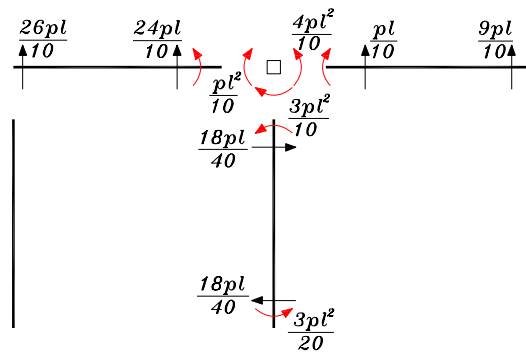


Figura 2.11

Nella seguente figura sono indicati il diagramma dell'azione assiale N , dell'azione di taglio V , del momento flettente M e la deformata della struttura.

N

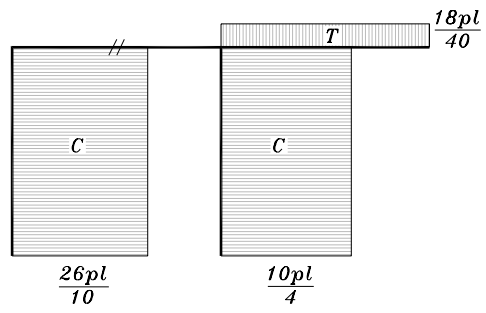


Figura 2.12

V

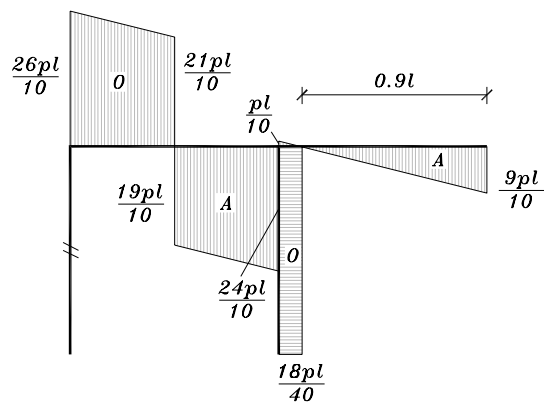


Figura 2.13

M

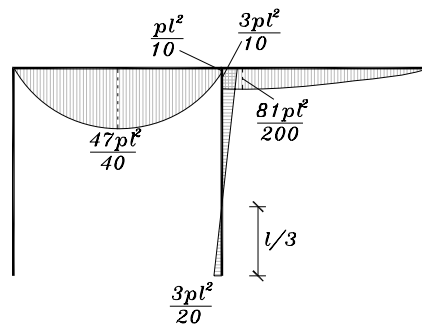


Figura 2.14

Deformata

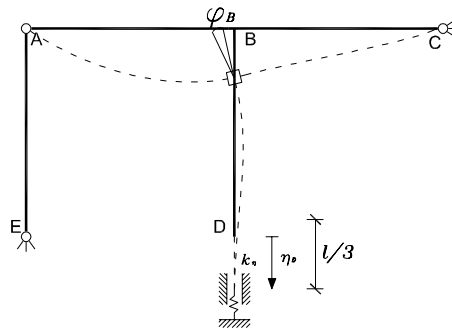


Figura 2.15

Osservazione 1

Lungo l'asta AB il taglio si annulla in mezzeria, per cui il momento massimo positivo sarà:

$$M_{AB}(x = \frac{l}{2}) = \frac{26}{10} plx - p \frac{x^2}{2} = \frac{47}{40} pl^2$$

La posizione del momento massimo positivo sull'asta BC si determina calcolando il punto in cui si annulla il taglio:

$$\frac{9}{10} : x = 1 : l$$

$$x = 0.9 \cdot l$$

Nota la posizione in cui si annulla il taglio, si può determinare il valore del momento massimo positivo sull'asta BC:

$$M_{BC}(x = 0.9l) = \frac{9}{10} plx - p \frac{x^2}{2} = \frac{81}{200} pl^2$$

Osservazione 2

L'andamento del momento sull'asta BD è lineare di conseguenza la posizione del punto di flesso si ricava con una proporzione tra triangoli:

$$\frac{3}{20} : x = \frac{9}{20} : l$$

$$x = \frac{l}{3}$$

Esercizio 3 - Tema d'esame del 15/04/1998

Si consideri la struttura illustrata in figura, con EJ costante.

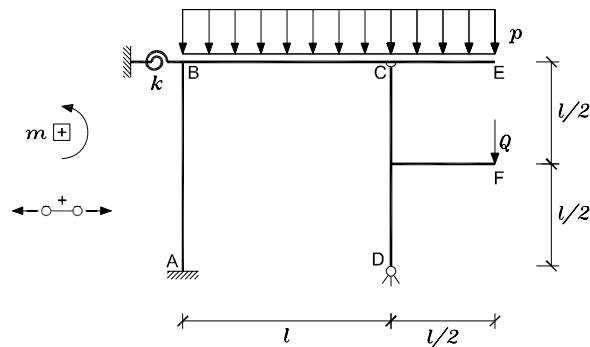


Figura 3.3

I valori dell'azione concentrata Q e della molla rotazionale k_θ sono pari a:

$$F = \frac{9}{4} pl$$

$$k_g = 6 \frac{EJ}{l}$$

La struttura illustrata in figura risulta essere, dall'analisi cinematica, una struttura due volte iperstatica a nodi spostabili.

Il metodo degli spostamenti può essere applicato assumendo come incognite la rotazione φ_B e lo spostamento orizzontale η_B del nodo B ed irrigidendo la struttura attraverso un *blocchetto*, rappresentato da un quadratino, e da una *biella fittizia* posti in corrispondenza del nodo B .

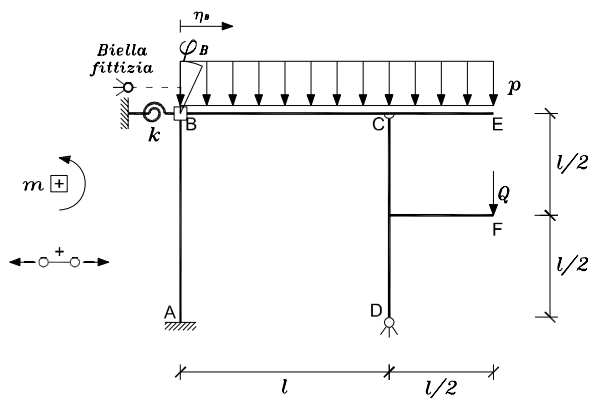


Figura 3.2

Il sistema risolvente è costituito dalle equazioni di equilibrio alla rotazione ed alla traslazione verticale del nodo B :

$$\begin{cases} \sum M_B = m_{B\varphi} \varphi_B + m_{B\eta} \eta_B + m_{B0} = 0 \\ \sum H_{biella} = h_{B\varphi} \varphi_B + h_{B\eta} \eta_B + h_{B0} = 0 \end{cases}$$

I coefficienti di influenza possono essere determinati, secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente le azioni indotte sulla struttura dalla rotazione unitaria φ_B , dallo spostamento orizzontale unitario η_B e dai carichi esterni.

Ponendo $\varphi_B = 1$, $\eta_B = 0$, $p = 0$ e $Q=0$ si ha:

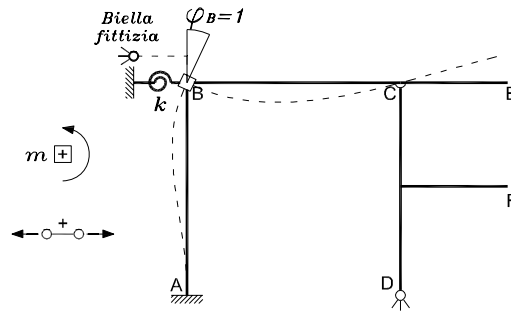


Figura 3.3

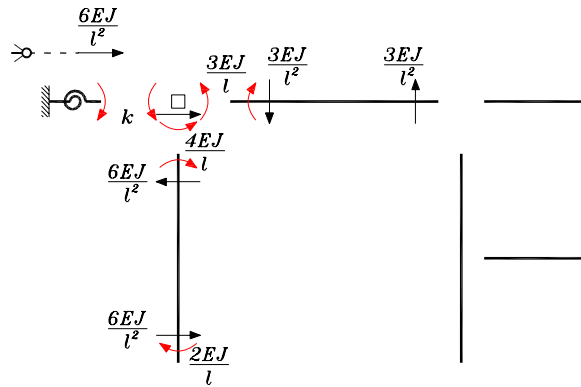


Figura 3.4

$$\begin{cases} m_{B\varphi} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} + k_s = \frac{13EJ}{l} \\ h_{B\varphi} = \frac{6EJ}{l^2} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_B = 1$, $p = 0$ e $Q=0$ si ha:

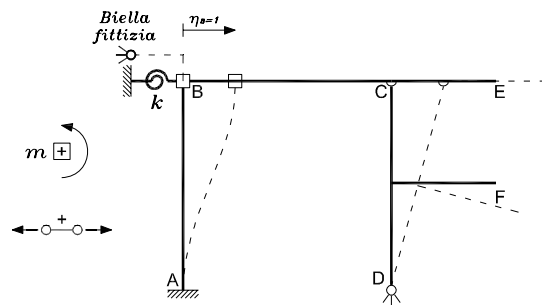


Figura 3.5

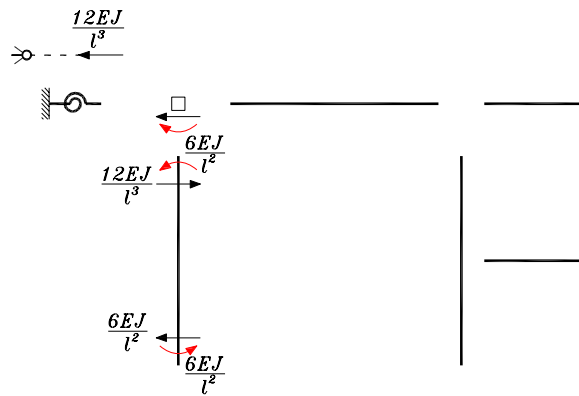


Figura 3.6

$$\begin{cases} m_{B\eta} = -\frac{6EJ}{l^2} \\ h_{B\eta} = -\frac{12EJ}{l^3} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_B = 0$, $p \neq 0$ e $Q=0$ si ha:

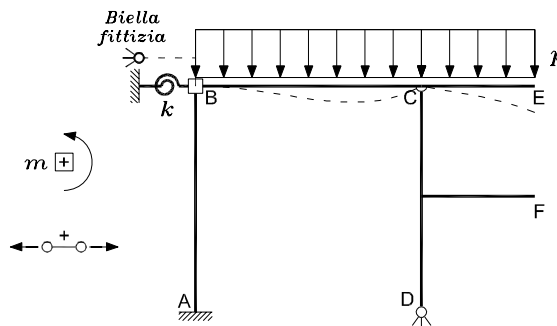


Figura 3.7

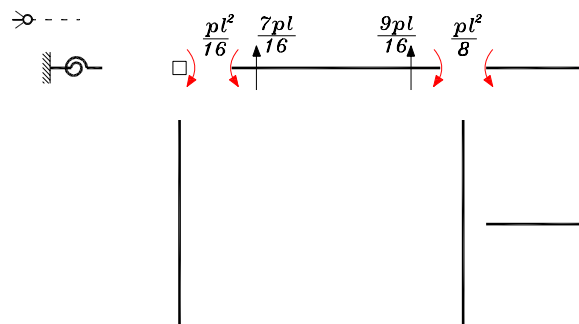


Figura 3.8

$$\begin{cases} m_{B0,p} = -\frac{pl^2}{16} \\ h_{B0,p} = 0 \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_B = 0$, $p = 0$ e $Q \neq 0$ si ha:

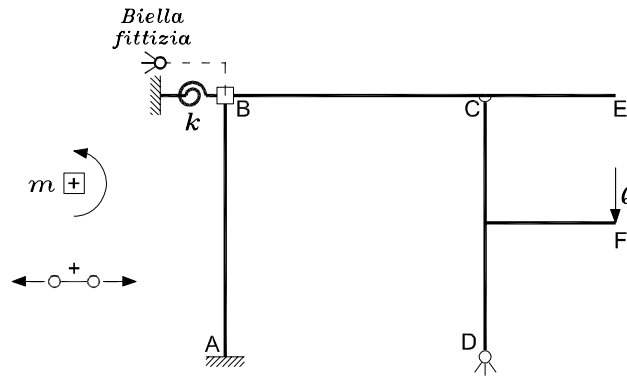


Figura 3.9

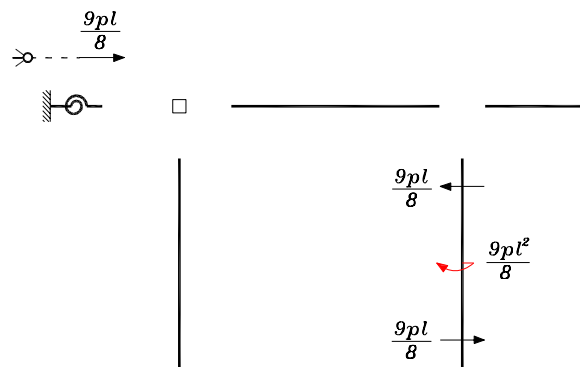


Figura 3.10

$$\begin{cases} m_{B0,Q} = 0 \\ h_{B0,Q} = \frac{9}{8} pl \end{cases}$$

Noti i *coefficienti di influenza* possono essere determinati i valori delle incognite φ_B e η_B attraverso la risoluzione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{13EJ}{l} \varphi_B - \frac{6EJ}{l^2} \eta_B - \frac{1}{16} pl^2 = 0 \\ \frac{6EJ}{l^2} \varphi_B - \frac{12EJ}{l^3} \eta_B + \frac{9}{8} pl = 0 \end{cases}$$

La rotazione φ_B e lo spostamento orizzontale η_B risultano:

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{1}{16} \frac{pl^3}{EJ} \\ \eta_B = + \frac{1}{8} \frac{pl^4}{EJ} \end{cases}$$

Noti i valori delle incognite è possibile valutare le azioni interne agenti sulla struttura per effetto della rotazione φ_B , dello spostamento orizzontale η_B e dei carichi esterni ed, attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti, determinarne la risultante.

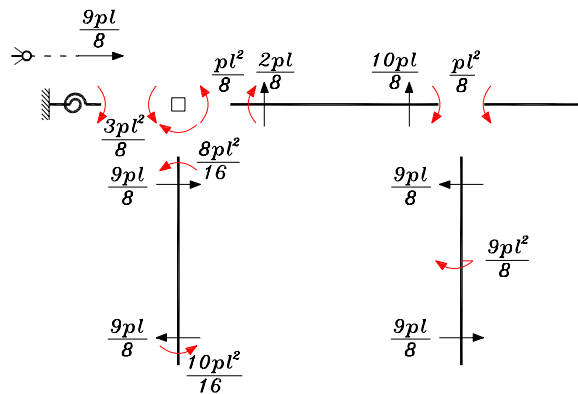


Figura 3.11

Nella seguente figura sono indicati il diagramma dell'azione assiale N , dell'azione di taglio V , del momento flettente M e la deformata della struttura.

N

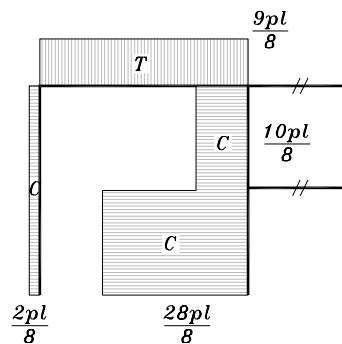


Figura 3.12

V

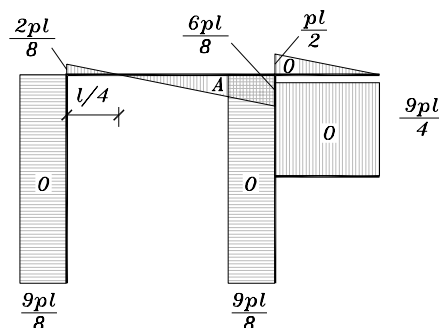


Figura 3.13

M

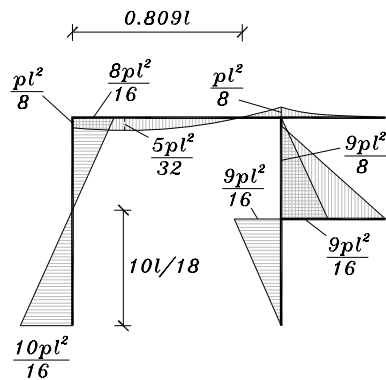


Figura 3.14

Deformata

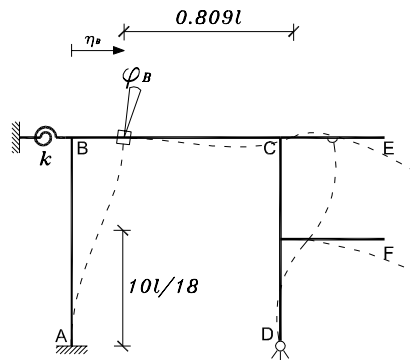


Figura 3.15

Osservazione 1

La posizione del momento massimo positivo sull'asta BC si determina calcolando il punto in cui si annulla il taglio:

$$\frac{2}{8} : x = 1 : l$$

$$x = \frac{l}{4}$$

Nota la posizione in cui si annulla il taglio, si può determinare il valore del momento massimo positivo sull'asta BC:

$$M_{BC} \left(x = \frac{l}{4} \right) = \frac{1}{8} pl^2 + \frac{2}{8} plx - p \frac{x^2}{2} = \frac{5}{32} pl^2$$

Osservazione 2

L'andamento del momento sull'asta AB è lineare di conseguenza la posizione del punto di flesso si ricava con una proporzione tra triangoli:

$$\frac{10}{16} : x = \frac{18}{16} : l$$

$$x = \frac{10}{18} l$$

Per determinare il punto di flesso dell'asta BC bisogna calcolare il punto in cui si annulla il momento ponendo come incognita la distanza x a partire da uno dei due estremi; in questo caso il calcolo viene eseguito considerando x a partire dal punto B :

$$M_{BC}(x) = \frac{1}{8} pl^2 + \frac{2}{8} plx - p \frac{x^2}{2} = 0$$

$$x = 0.809 \cdot l$$

Esercizio 4 - Tema d'esame del 23/09/1997

Si consideri la struttura illustrata in figura, con EJ costante.

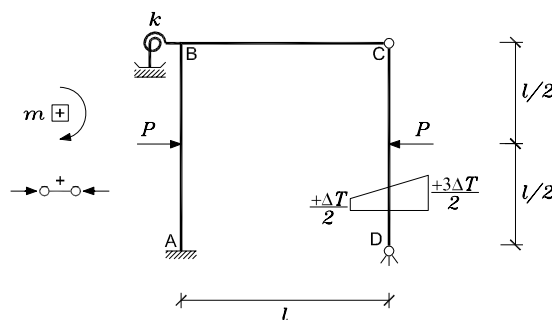


Figura 4.4

I valori della molla rotazionale k e della variazione termica impressa sono pari a:

$$k = \frac{2EJ}{l}$$

$$\frac{\alpha\Delta T}{l} = \frac{pl}{60EJ}$$

$$\frac{\alpha\Delta T}{t} = \frac{pl}{3EJ}$$

La struttura illustrata in figura risulta essere, dall'analisi cinematica, una struttura due volte iperstatica a nodi spostabili.

Il *metodo degli spostamenti* può essere applicato assumendo come incognite la rotazione φ_B del nodo B e lo spostamento orizzontale η_C del nodo C ed irrigidendo la struttura attraverso un *blocchetto*, rappresentato da un quadratino, e da una *biella fittizia* posti rispettivamente in corrispondenza del nodo B del nodo C .

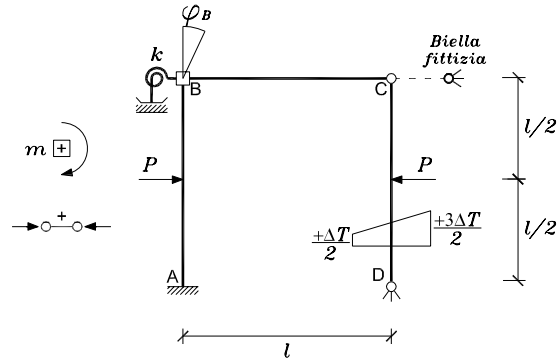


Figura 4.2

Il sistema risolvete è costituito dalle equazioni di equilibrio alla rotazione del nodo B ed alla traslazione orizzontale del nodo C:

$$\begin{cases} \sum M_B = m_{B\varphi} \varphi_B + m_{B\eta} \eta_C + m_{B0} = 0 \\ \sum H_{biella} = h_{C\varphi} \varphi_B + h_{C\eta} \eta_C + h_{C0} = 0 \end{cases}$$

I coefficienti di influenza possono essere determinati, secondo il principio di sovrapposizione degli effetti, considerando separatamente le azioni indotte sulla struttura dalla rotazione unitaria φ_B , dallo spostamento orizzontale unitario η_C , dai carichi esterni e dalla variazione termica impressa.

Ponendo $\varphi_B = 1$, $\eta_C = 0$, $P = 0$ e $\Delta T = 0$ si ha:

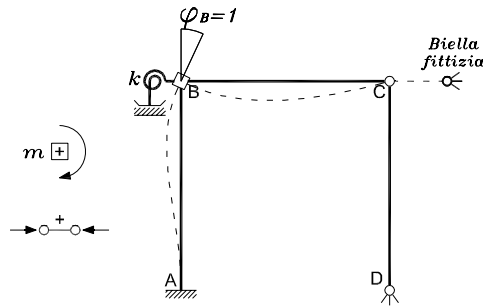


Figura 4.3

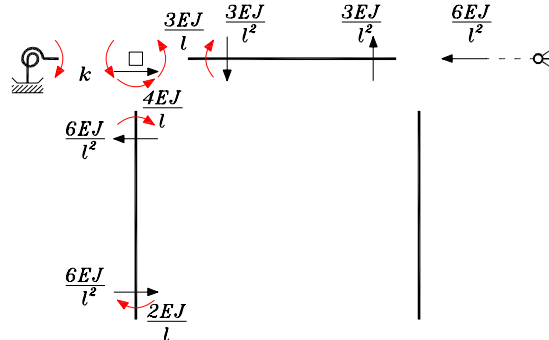


Figura 4.4

$$\begin{cases} m_{B\varphi} = \frac{3EJ}{l} + \frac{4EJ}{l} + k = \frac{9EJ}{l} \\ h_{C\varphi} = \frac{6EJ}{l^2} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_C = 1$, $P = 0$ e $\Delta T = 0$ si ha:

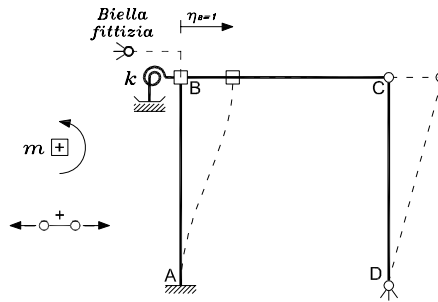


Figura 4.5

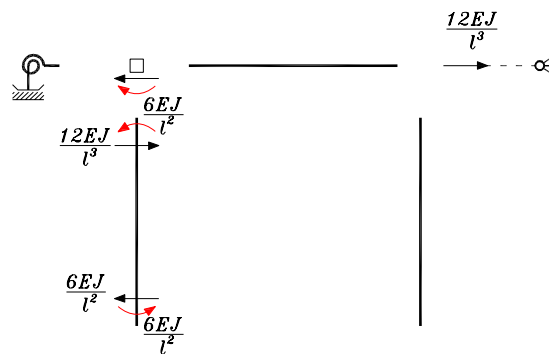


Figura 4.6

$$\begin{cases} m_{B\eta} = -\frac{6EJ}{l^2} \\ h_{C\eta} = -\frac{12EJ}{l^3} \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_C = 0$, $P = 0$ e $\Delta T \neq 0$ si ha:

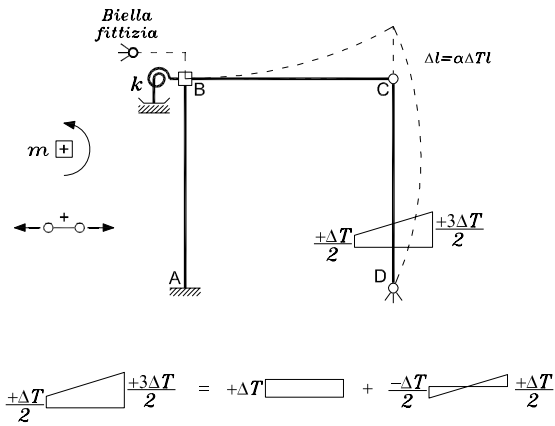


Figura 4.7

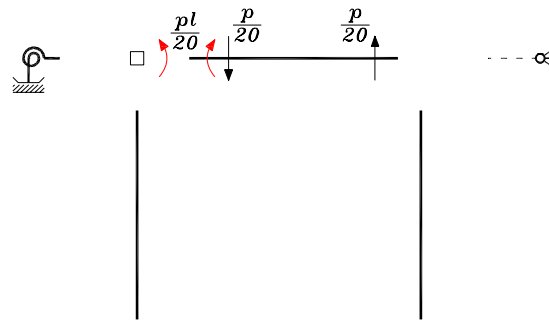


Figura 4.8

La variazione termica si può vedere come somma di una variazione termica costante pari a ΔT e una variazione lineare da $-\Delta T/2$ e $\Delta T/2$; attraverso il principio di sovrapposizione degli effetti si valutano gli effetti dei singoli contributi.

$$\begin{cases} m_{B0,\Delta T} = \alpha \Delta T \cdot l \cdot \frac{3EJ}{l^2} = \frac{Pl}{20} \\ h_{C0,\Delta T} = 0 \end{cases}$$

Ponendo $\varphi_B = 0$, $\eta_C = 0$, $P \neq 0$ e $\Delta T = 0$ si ha:

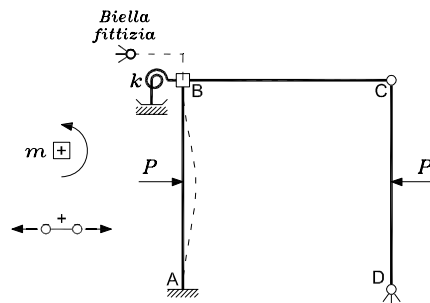


Figura 4.9

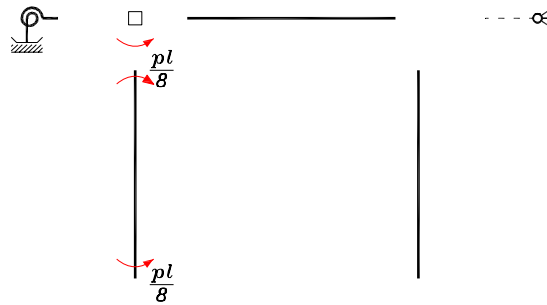


Figura 3.10

$$\begin{cases} m_{B0,P} = \frac{Pl}{8} \\ h_{C0,P} = 0 \end{cases}$$

Noti i *coefficienti di influenza* possono essere determinati i valori delle incognite φ_B e η_B attraverso la risoluzione del sistema.

$$\begin{cases} \frac{9EJ}{l} \varphi_B - \frac{6EJ}{l^2} \eta_C + \frac{7}{40} Pl = 0 \\ \frac{6EJ}{l^2} \varphi_B - \frac{12EJ}{l^3} \eta_C + 0 = 0 \end{cases}$$

La rotazione φ_B e lo spostamento orizzontale η_C risultano:

$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{7}{240} \frac{pl^2}{EJ} \\ \eta_C = -\frac{7}{480} \frac{pl^3}{EJ} \end{cases}$$

Noti i valori delle incognite è possibile valutare le azioni interne agenti sulla struttura per effetto della rotazione φ_B , dello spostamento orizzontale η_C , dei carichi esterni e della variazione termica impressa ed, attraverso il *principio di sovrapposizione degli effetti*, determinarne la risultante.

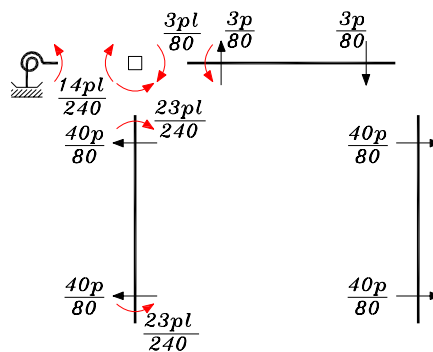


Figura 4.11

Nella seguente figura sono indicati il diagramma dell'azione assiale N , dell'azione di taglio V , del momento flettente M e la deformata della struttura.

N

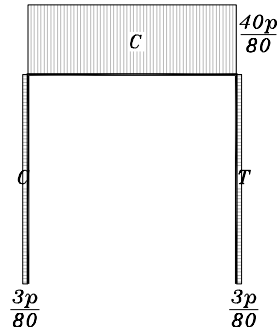


Figura 4.12

V

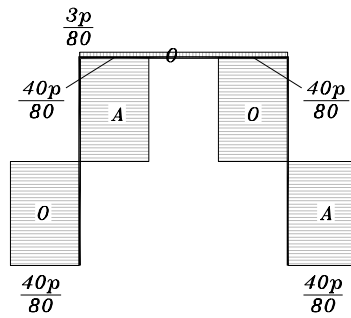


Figura 4.13

M

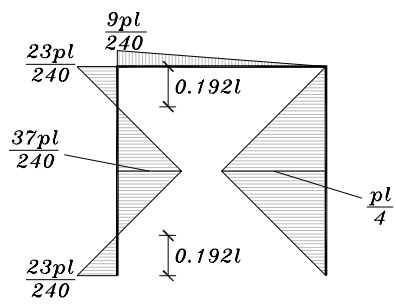


Figura 4.14

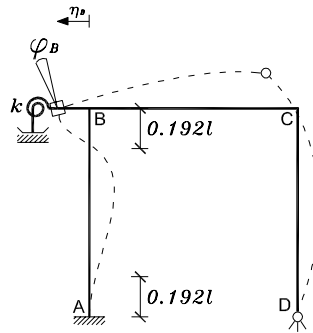
Deformata


Figura 3.15

Osservazione 1

Sia lungo l'asta AB che lungo l'asta CD il taglio si annulla in mezzeria, per cui il momento massimo positivo sarà:

$$M_{AB}\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{40}{80}Px - \frac{23}{240}P = \frac{37}{240}Pl$$

$$M_{CD}\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{Pl}{4}$$

Osservazione 2

Per determinare i punti di flesso dell'asta AB bisogna calcolare il punto in cui si annulla il momento ponendo come incognita la distanza x a partire prima dall'estremo A e poi dall'estremo B :

- dall'estremo A :

$$M_{AB}(x_1) = -\frac{23}{240}Pl + \frac{P}{2}x_1 = 0$$

$$x_1 = 0.192 \cdot l$$

- dall'estremo B :

$$M_{AB}(x_2) = -\frac{23}{240}Pl + \frac{P}{2}x_2 = 0$$

$$x_2 = 0.192 \cdot l$$

Di seguito si verifica l'influenza della variazione termica impressa sulla deformata dell'asta CD :

$$y'' = -\frac{M(x)}{EJ} - \frac{2\alpha\Delta T}{t} = \frac{P}{2EJ}x - \frac{2Pl}{3EJ}$$

$$y'' = 0 \text{ per } x = \frac{4}{3}l \quad \Rightarrow \quad \text{soluzione non valida: } y'' < 0 \quad \forall x$$